Курсова работа

Стефчо Горчов Наков

старши преподавател по математика

Природо математическа гимназия

„Св. Климент Охридски”

град Монтана

Адрес: Монтана 3400

ПМГ „Св. Климент Охридски”

ул. „Юлиус Ирасек” 7

Стефчо Наков

nakkoff@abv.bg

Тема:

Приложения на хомотетия за решаване на построителни задачи за вписване на фигури

Предмет:

математика – профилирана подготовка - IX клас

Вид на урока:

занятие СИП (два учебни часа)

Кратко представяне:

В учебната програма по математика ПП – IX клас е отделена само една тема за приложения на хомотетията и то най-вече при решаване на задачи от доказателствен характер. По този начин се губи идеята за хомотетия като изображение и движение на обекти в равнината. В часовете по ПП вече са разгледани задачи за построяване на триъгълник по признаците за подобни триъгълници и избран конкретен линеен елемент. Част от задачите са илюстрирани с използване на *GeoGebra*.

Идеята и спецификата на построителните задачи присъства много рядко в целия курс на обучение по математика. В VII клас – построяване на симетрала на отсечка, ъглополовяща на ъгъл и построяване на триъгълник по признаците за еднаквост. В VIII клас – построяване на допирателни, геометрични места на точки и някои построения с помощта на еднаквости (часове по СИП). Задачите за вписване с хомотетия дават съвсем нова интерпретация на учебния материал и възможност за прилагане на еднотипен алгоритъм при различни начални данни и обекти. Усъвършенства се способността за анализ и синтез на определена конструкция и изследване на възможности.

В началото на урока припомням основните дефиниции и свойства на хомотетията

Кое геометрично изображение наричаме хомотетия?

Изображение на равнината в себе си, при което на всяка точка *X* се съпоставя точка *X’* такава, че $\overrightarrow{OX'} = k.\overrightarrow{OX}$, където *O* е произволна точка в равнината а $k \neq 0$ е произволно реално число, се нарича ***хомотетия с център O и коефициент k***. $h(O,k)$

Какво знаем за точка и нейният образ?

Центърът на хомотетията, точката и нейният образ са колинеарни

Как се изобразява права?

Права, която минава през центъра на хомотетия се изобразява в себе си

Права, която не минава през центъра на хомотетия се изобразява в в права, успоредна на дадената

Как се изобразява лъч?

Образът на лъч е лъч, еднопосочен на дадения при *k* > 0, противопосочен на дадения при *k* < 0

Как се изобразява ъгъл?

Образът на ъгъл е ъгъл равен на дадения.

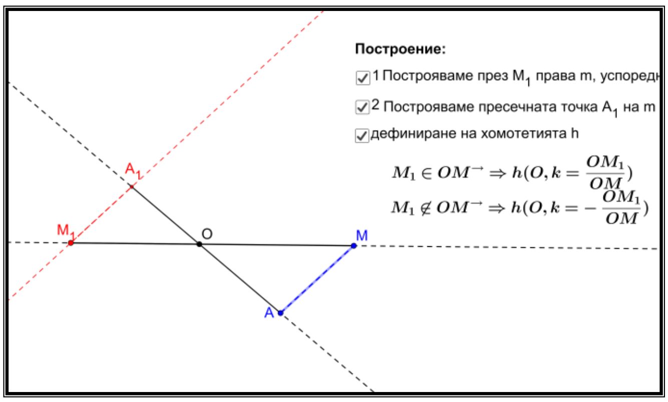
Как се изобразява отсечка?

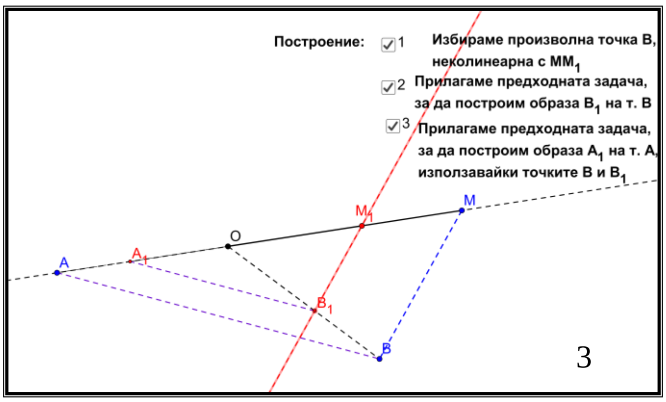
Образът на отсечка *a* е отсечка a' с дължина $a' = |k|.a$

Кои са основните начини за задаване на хомотетия?

1. По дефиниция – с център и коефициент
2. С три точки – център, образ и първообраз.

Припомням основните стъпки при построяване на образ на точка при хомотетия, дефинирана с три точки –*O*, *M* и *M’*, съответно първообраз и образ при хомотетия с център точка *O*. Разглеждаме два случая – точката *A*, образа на която търсим, не лежи на правата *MM*’ и когато точката *A* лежи на *MM*’ (*аплети 1 и 2*)





Пристъпвам към дефиниране на основната задача:

<u>Основна задача:</u> Дадена е фигура ***F***, в която искаме да впишем фигура ***M***, изпълняваща конкретни условия за инцидентност на върховете на ***M*** с контура на ***F***

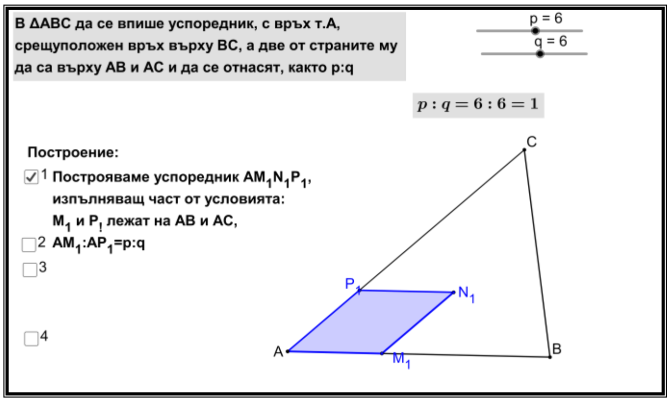
С помощта на учениците определяме стратегия за работа:

1. Отделяме условията за ***M***, които се запазват при хомотетия – колинеарност, прпорционалност, успоредност, равенство на ъгли и други.
2. Изпълняваме част от условията за структуриране на първичен обект – фигура ***M'***
3. Дефинираме подходяща хомотетия, която да запази условията за ***M'*** и да реализира останалите условия за ***M***

<u>Задача 1:</u> В ΔABC да се впише успоредник *AMNP* така, че *M*. *N* и *P* лежат съответно върху страните *AB, BC* и *AC* и $AM : AP = p : q$ (*<u>аплет 3</u>*)

Кои са условията, които са запазват при хомотетия?

- успоредността на страните;
- ъглите на успоредника;
- отношението на страните.

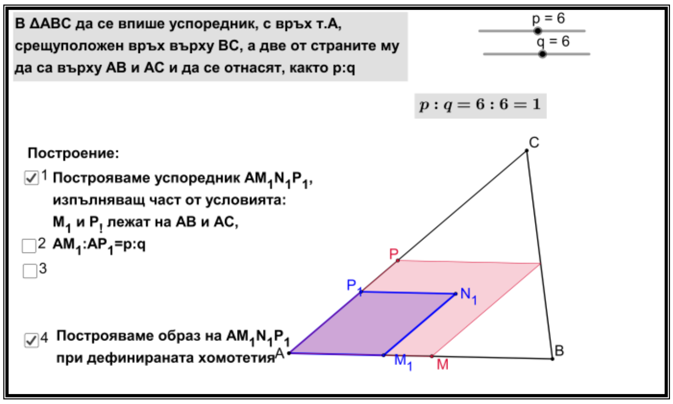


Кои условия да изберем за първичния обект?

- точки M_1 и P_1 лежат върху съответните страни на ΔABC;
- страните на успоредника са в желаното отношение.

Как да дефинираме хомотетията?

- за да запази колинеарността със сътаните на ΔABC и върха *A*, трябва да е с този център;
- т.*N* получаваме от колинеарността с два обекта – правата AN_1 и страната *BC*



Как да възстановим успоредника?

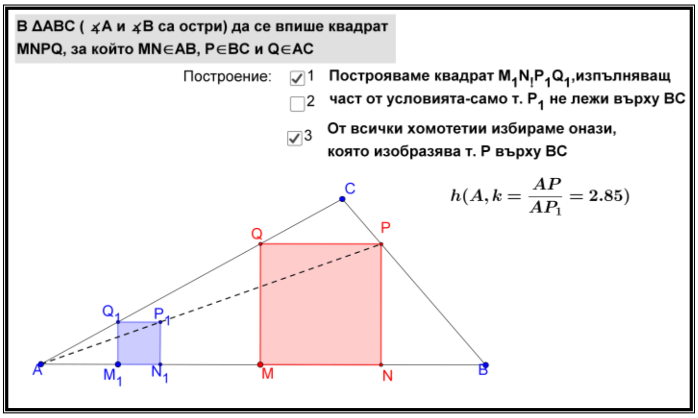
- използваме начините за построяване на образ при хомотетия дефинирана с три точки –център A т. N и образ N_1.

Как можем да приложим задачата, ако за успоредника AMNP е поставено условието да е ромб?

- прилагаме *<u>задача 1.</u>* за равни стойности на p и q;
- обръщам внимание, за ромб е достатъчно да построим точка $N = l_a \cap BC$ и с успоредни прави да възстановим ромба. Използваме свойството, че в ромба диагоналите са ъглополовящи.

<u>Задача 2:</u> В ΔABC (ъглите A и B са остри) да се впише квадрат $MNPQ$ така, че M и N са от страната AB а P и Q са съответно върху страните, BC и AC (*<u>аплет 4</u>*)

На базата на *<u>задача 1.</u>* на учениците се дава възможност сами да открият кои свойства трябва да притежава първичния обект и как да бъде построен. Откриват центъра на търсената хомотетия и построяват образа.



За самостоятелна работа задавам следната задача, комбинация на *<u>задачи 1 и 2</u>*:

<u>Задача:</u> В ΔABC (ъглите A и B са остри) да се впише правоъгълник $MNPQ$ така, че M и N са от страната AB а P и Q са съответно върху страните, BC и AC и $MN : MQ = p : q$

За следващите задачи, чрез въпроси към учениците, припомням някои основни факти свързани с хомотетия и окръжност.

- всеки две окръжности са хомотетични;
- за всеки две окръжности съществуват две хомотетии изобразяващи едната в другата;
- центровете на тези хомотетии лежат върху централата на окръжностите.

<u>Задача 3:</u> В кръгов сектор да се впише квадрат *ABCD* така, че *A* и *D* са от радиусите, а *B* и *C* са точки от дъгата на сектора. (*<u>аплет 5</u>*)

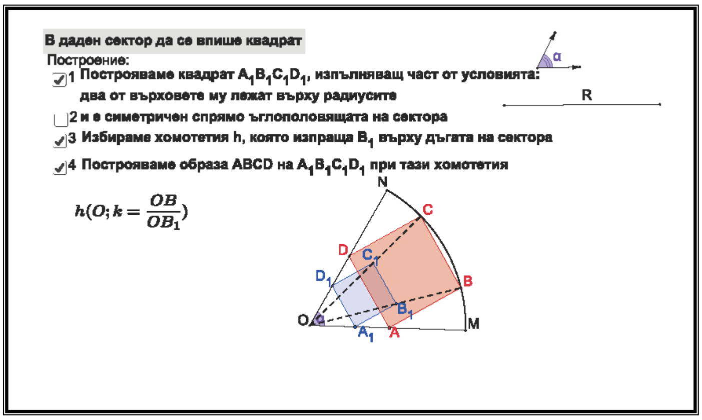
За конструиране на първичния обект ни е нужен допълнителен анализ на ситуацията.

Има ли ос на симетрия за сектора?

-ъглополовящата на ъгъла на сектора;

Кои са осите на симетрия на квадрат?

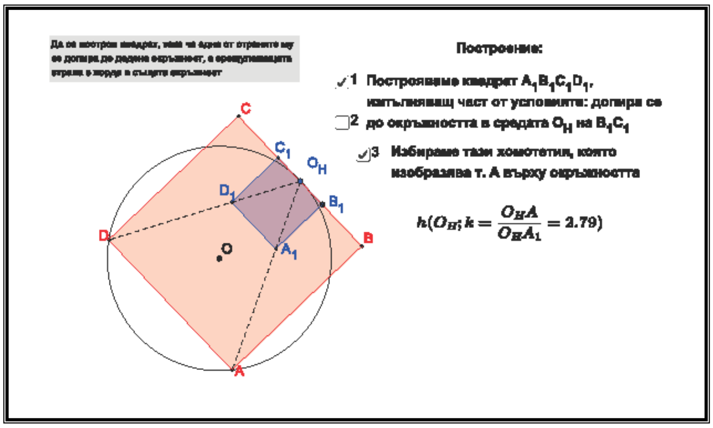
- правите по двата диагонала и двете средни отсечки.



Достигаме до необходимостта осите на симетрии да съвпадат и да са неподвижни при хомотетия. Първичния обект построяваме така, че A_1 и D_1 да са върху радиусите и да са симетрични спрямо ъглополовящата на ъгъла на сектора. Изборът на хомотетия и начините на построение, учениците правят сами на базата на предходните задачи.

<u>Задача 4:</u> Да се построи квадрат *ABCD* така, че едната страна да е хорда от окръжността, а срещулежащата страна да се допира до окръжността. (*<u>аплет 6</u>*)

Определяме условията на първичния обект – една от страните са допира до окръжността в средата си. Дефинираме хомотетия с център тази среда. Построението учениците правят самостоятелно.



За следващите две задачи припомняме основно твърдения от VIII клас.

Къде се намира центъра на окръжност, която минава през две дадени точки?

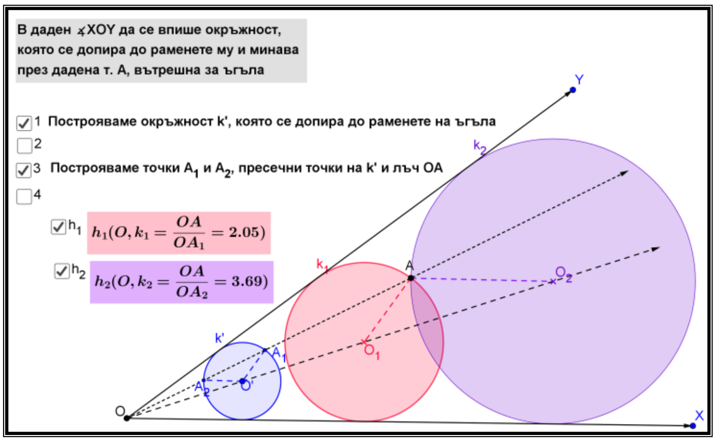
- върху симетралата на отсечката с краища двете точки.

Къде се намира центъра на окръжност, която се допира до раменете на даден ъгъл?

- върху ъглополовящата на ъгъла.

<u>*Задача 5:*</u> Да се построи окръжност, която се допира до раменете на даден ъгъл и минава през дадена точка от вътрешността му. (<u>*аплет 7*</u>)

След поставените въпроси, по естествен начин учениците отбелязват, че за първичния обект е достатъчно да се допира до раменете на ъгъла, а след това с хомотетия ще го "изпратим" да минава през точката. Дадената точка се явява образ на точка от първичния обект.



Как да намерим първообраза на точката?

- той лежи върху правата OA дефинирана от дадената точка и центъра на хомотетия.

Колко такива точки ще имаме и колко хомотетии ще дефинират те?

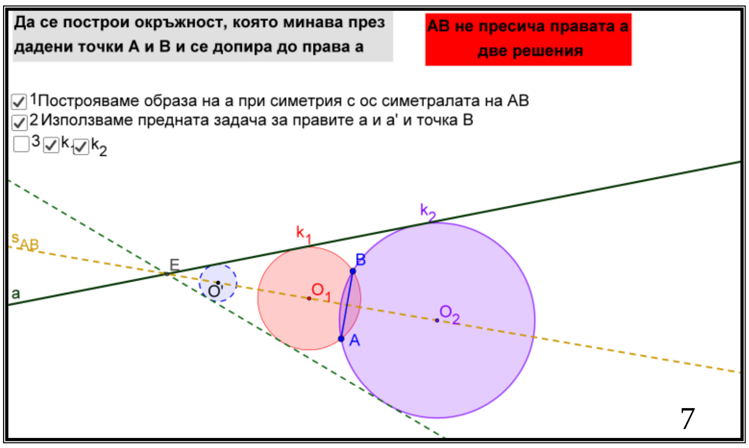
Опитайте се да дефинирата коефициентите на хомотетиите?

Учениците самостоятелно достигат до коефициентите на двете хомотетии като частно на дължини на отсечки.

<u>*Задача 6:*</u> Да се построи окръжност, която се допира до дадена права и минава през две дадени точки A и B. (<u>*аплет 9*</u>)

Къде лежи центърът на окръжност, която минава през две дадени точки?

- върху симетралата на отсечката, с краища двете точки, на база на



основното свойство на симетралата

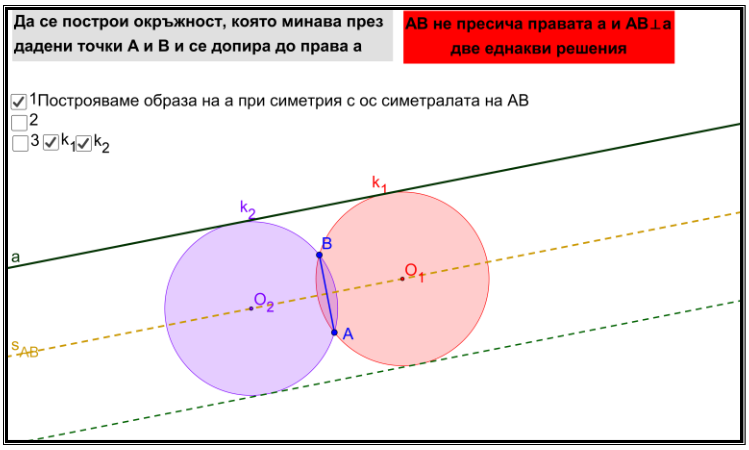
Как да намерим втори обект, на който да лежи търсеният център?

Как да използваме вече познати задачи и конструкции?

- Концентрираме се върху идеята на *задача 5* използвайки симетрията на един ъгъл относно ъглополовящата му, построяваме симетрична на правата спрямо симетралата на *AB*
- Използваме *задача 5* за получения ъгъл и точка *A*.

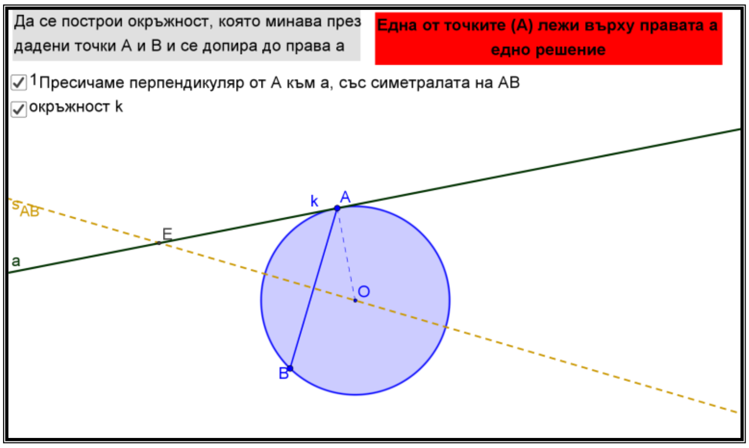
В задачата, използвайки възможностите на *GeoGebra* за динамизиране на конструкциите, изследваме различни възможности за решения, като учениците сами правят съответните изводи за връзка между положението на началните обекти и броя и вида на решенията

(*аплети 8.1, 8.2, 8.3*)



Използвайки тази задача финализираме цялостната структура на една задача за построение :

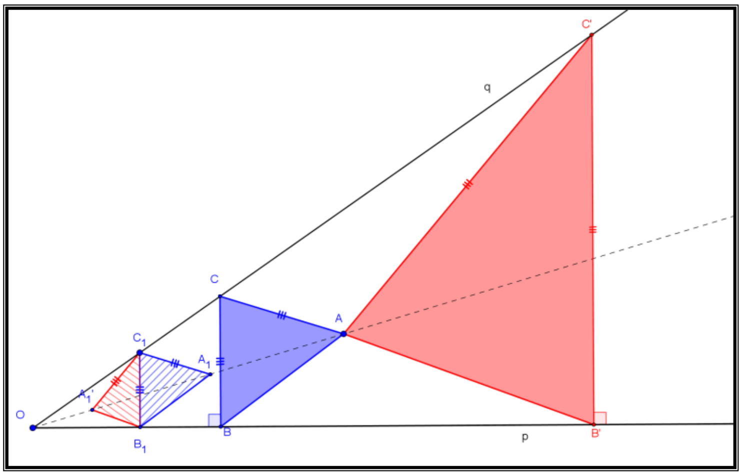
- анализ
- плана за построение;
- доказателство;
- изследване.



По този начин урокът реализира и втора основна задача: усвояване на нов начин за реализиране на математическа задача, като ясно се детерминират нейните основни части и етапи на изпълнение.

В края на урока отново преговаряме основните етапи на задачите за вписване и построение чрез хомотетия. Поставям задачите за домашна работа, като (при наличие на време) заедно с учениците обсъждаме какви условия са инвариантни при хомотетията и как да ги използваме за конструиране на първичен обект.

Домашна работа:



1. (*аплет 9*) Даден е ъгъл pOq и точка A от вътрешността му. Да се построи равнобедрен ΔABC така, че: $AC = BC,$ $B \in \overrightarrow{Op}, C \in \overrightarrow{Oq}, BC \perp \overrightarrow{Op}$

   Упътване: Всички ученици получават готов аплет, на базата, на който да правят разсъждения и построения.

2. В кръгов сегмент да с впише квадрат, така, че едната страна да лежи на хордата на сегмента, а за срещулежащата е изпълнено:

   А) краищата са точки от дъгата на сегмента;

   Б) страната е допирателна до дъгата на сегмента. (*аплет 10*)

   Упътване: Използвайте идеите на задача 3.

3. В кръгов сектор да се впише правоъгълник $ABCD$ така, че A и D са от радиусите, а B и C са точки от дъгата на сектора и $AB:AD = p:q$.

   Упътване: Задача 3. е частен случай на задачата при $p:q = 1:1$

Използвана литература:

1. Додунеков Ст., Кожухарова Г., Христова М., Капралова Д., Дойчев Св. „ Математика за профилирана подготовка 9 клас”, изд. „Регалия 6”, София, 2001 г.
2. Банков К., Витанов Т., „Геометрия”, изд. „ИК Анубис”, София 2003 г.
3. Коларов к., Лесов Хр., „Сборник от задачи по геометрия VIII-XII клас”, изд. „Интеграл”, Добрич 1997 г.