

# КУРСОВА РАБОТА

**НА ТЕМА:**

С Ф Е Р А

Онлайн Курс "GeoGebra за преподаватели"

**Автор:**

Миглена Лилкова Багрянова

**Ръководител:**

Десислава Димкова

Януари 2016 г.

**Тема:** Сфера

**Предмет:** математика; **клас – XII клас**

**Вид на урока:** нов материал.

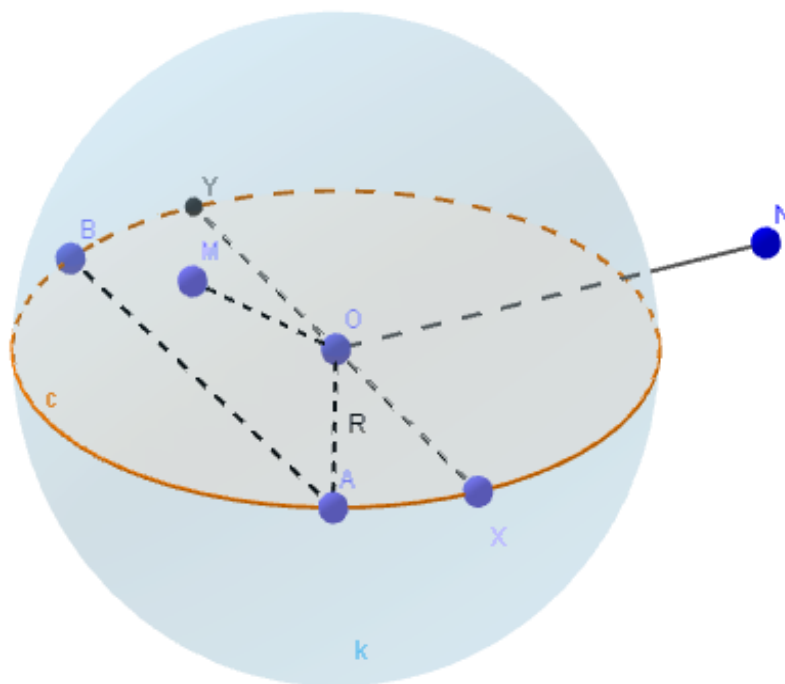
**Изискване към мястото на провеждане:** (кабинета по ИТ / кабинет с мултимедия / ...)

**Кратка анотация** В този курсов проект е представена една разработка на урок по математика за 12 клас на тема “Сфера” – използвайки динамиката, която ни предоставя средата GeoGebra . Урокът е предвиден за 1 учебен час и е част от раздел „Ротационни тела“.

### Описание на урока

Урока започва с даване на определение за сфера.

#### 1. Сфера



**Черт.1**

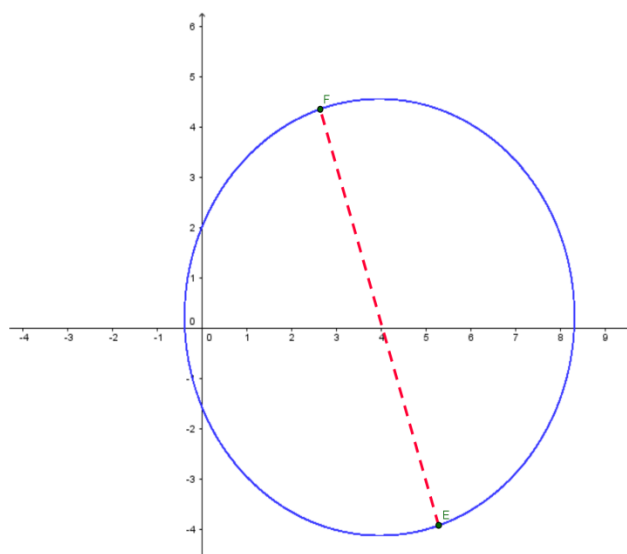
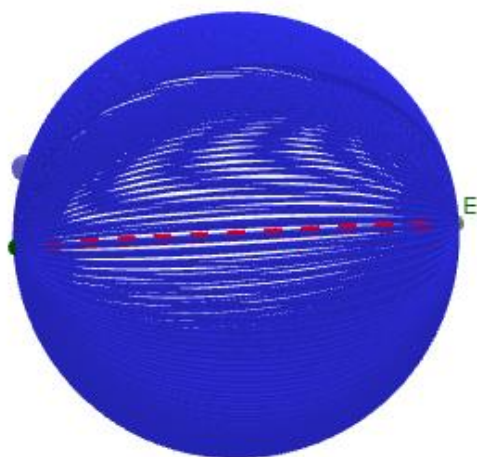
**а) Определение** – Множеството от точките в пространството, които се намират на дадено разстояние  $R$  от дадена точка  $O$ , се нарича **сфера**.

Учениците описват елементите на сферата изхождайки от черт.1

## б) Елементи

- **Център на сферата** – точката **O**
- **Радиус на сферата**  $OA=OX=R$ .
- **Хорда на сферата** – отсечка, която свързва две точки от сферата – **AB**
- **Диаметър на сферата** – хорда, която минава през центъра на сферата – **XУ**
- **Голяма окръжност на сферата** –  $c(O,R)$  – пресечната линия на сферата с равнина, минаваща през центъра A
- **Точка от сферата** – A,  $OA= R$
- **Вътрешна точка за сферата** – M,  $MO<R$
- **Външна точка за сферата** – N,  $NO>R$

Сферата е ротационна повърхнина, която се получава от въртенето на полуокръжност около диаметъра и.



[ротационно тяло.ggb](#)

## 2. Взаимно положение на сфера и права

Следва дискусия за взаимните положения на сфера и права

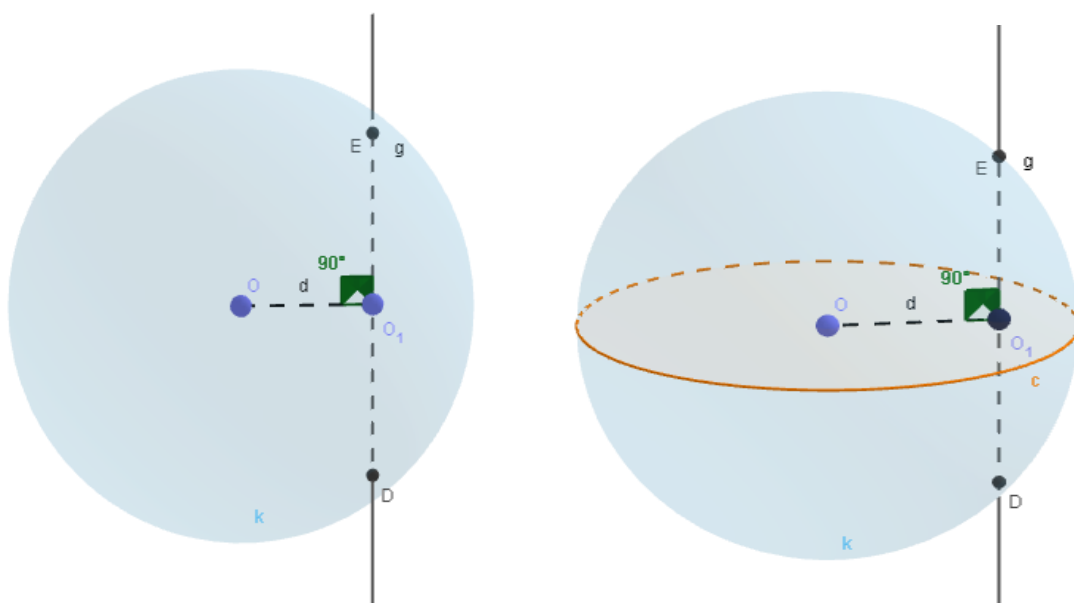
Дейност на учителя	Дейност на ученика
Според вас какви са взаимните положения на сфера и права?	<ul style="list-style-type: none"><li>- Правата пресича сферата</li><li>- Правата се допира до сферата</li><li>- Правата и сферата нямат общи точки</li></ul>

Как ще разберем какво е взаимното им положение? Какво трябва да знаем?	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Трябва да знаем колко е разстоянието от центъра на сферата до правата и радиуса на сферата.</li> <li>- Ако разстоянието е по-малко от радиуса тогава правата пресича сферата, ако е равно на радиуса тогава правата се допира до сферата, а ако е по-голямо от радиуса тогава правата и сферата нямат обща точка.</li> </ul>
Как ще намерим разстоянието от центъра до правата?	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Като построим ортогоналната проекция на центъра на сферата върху правата.</li> </ul>
И как ще я построим?	<ul style="list-style-type: none"> <li>- През центъра построяваме права перпендикулярна на дадената права и тяхната пресечница е търсената точка т.е. ортогоналната проекция на центъра на сферата върху правата. Разстоянието от центъра на сферата до ортогоналната проекция е търсеното разстояние.</li> </ul>

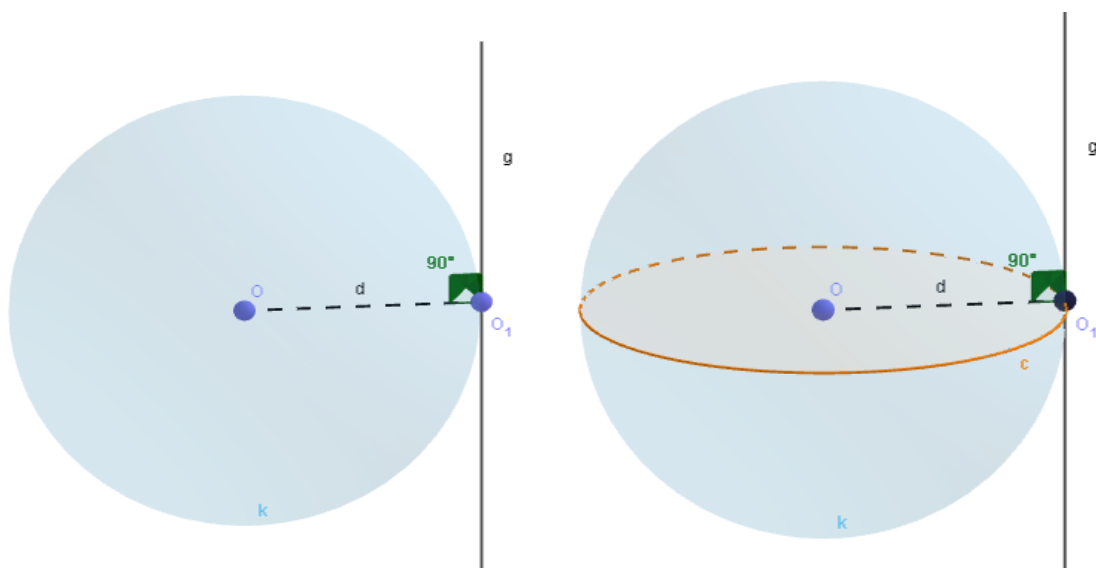
И така да обобщим.

Нека са дадени сфера  $k(O;R)$  и права  $g$ . Означаваме с  $O_1$  ортогоналната проекция на центъра  $O$  върху правата  $g$ . Възможни са три случая:

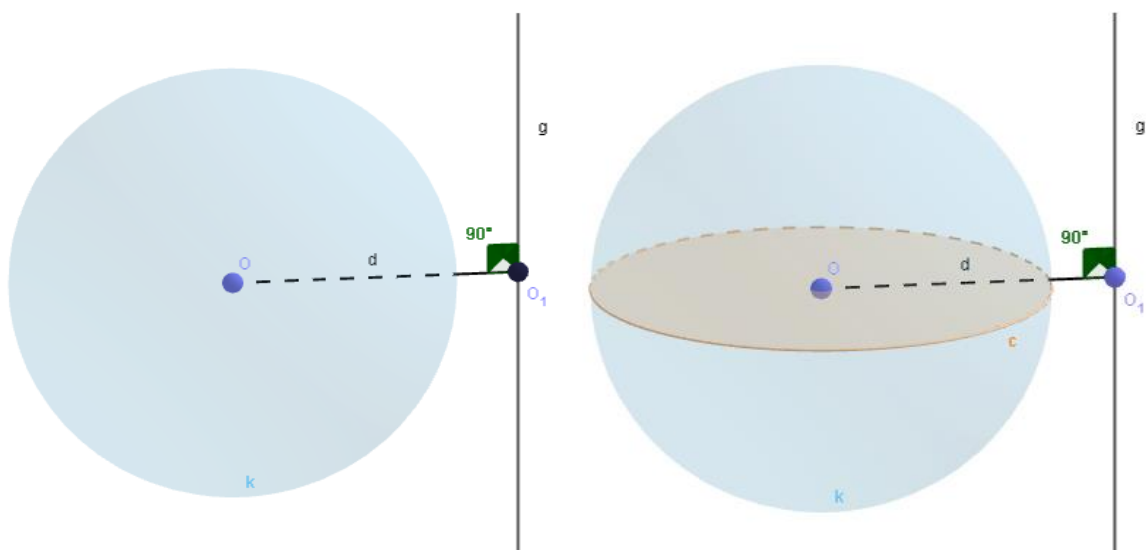
- $g$  - секателна (секуща) на  $k$  ( $OO_1=d<R$ )



- $g$  – допирателна (тангента) на  $k$  ( $OO_1=d=R$ )



- $g$  и  $k$  нямат общи точки ( $OO_1=d>R$ )



Сега да определим взаимното положение на сфера и равнина.

### 3. Взаимно положение на сфера и равнина

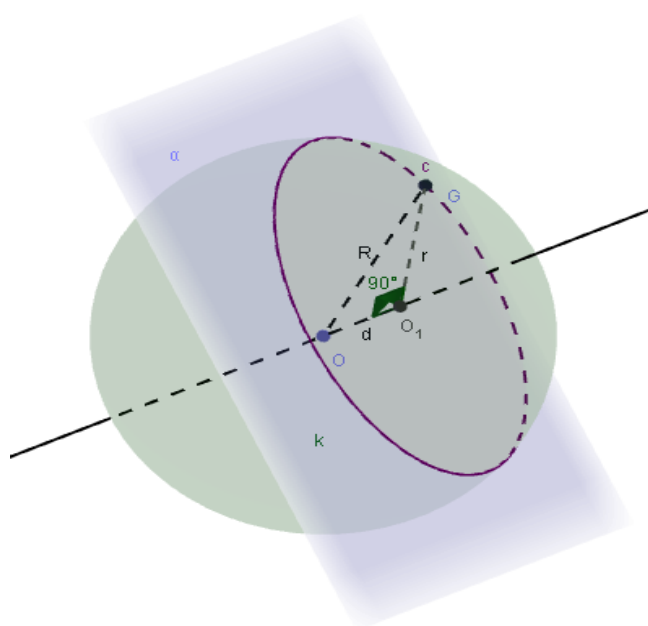
Следва дискусия за взаимните положения на сфера и равнина

Дейност на учителя	Дейност на ученика
Какви са взаимните положения на сфера и равнина?	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Както при права и сфера, ще се пресичат, ще се допират и няма да имат обща точка.</li> </ul>

Какво трябва да знаем, за да определим взаимното им положение?	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Трябва да знаем колко е разстоянието от центъра на сферата до равнината и радиуса на сферата.</li> <li>- Ако разстоянието е по-малко от радиуса, тогава равнината пресича сферата;</li> <li>- Ако разстоянието е равно на радиуса, тогава равнината се допира до сферата;</li> <li>- Ако разстоянието е по-голямо от радиуса тогава равнината и сферата нямат обща точка.</li> </ul>
Как ще намерим разстоянието от центъра до равнината?	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Като построим ортогоналната проекция на центъра на сферата върху равнината.</li> </ul>
Какво сечение ще се получи при пресичането на сферата с равнината?	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Окръжност</li> </ul>

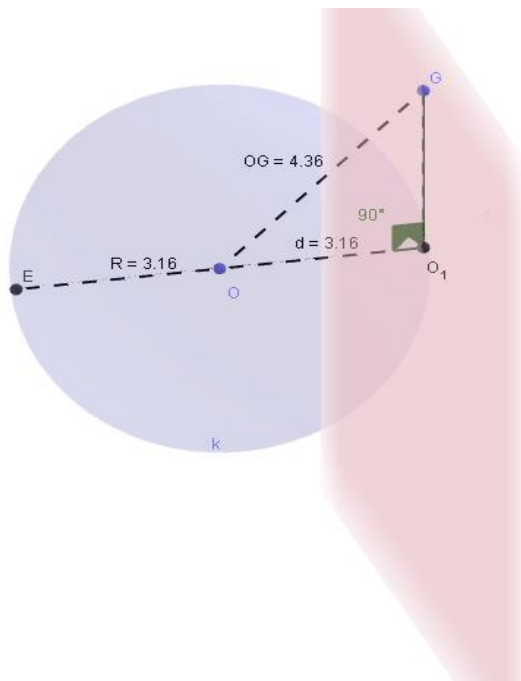
Да обобщим: Нека са дадени сфера  $k(O;R)$  и равнина  $\alpha$ . Означаваме с  $O_1$  ортогоналната проекция на центъра  $O$  върху равнината  $\alpha$ . Възможни са три случая:

- $\alpha$  пресича  $k$  в окръжност с радиус  $r < R$



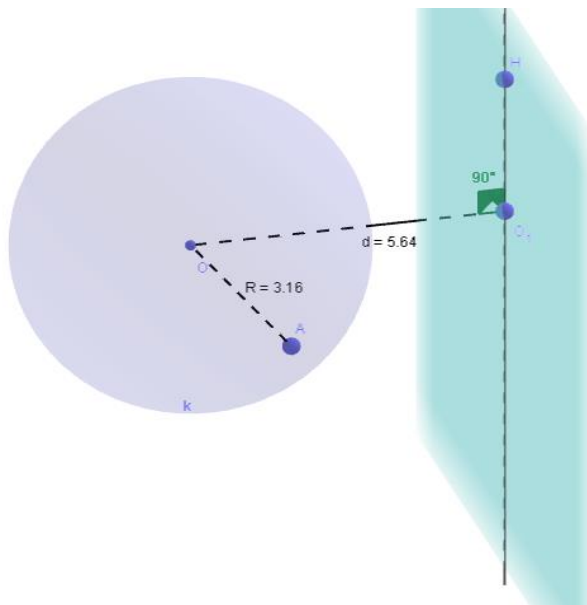
$$OO_1 = d < R$$

- $\alpha$  се допира до  $k$  в точка  $O_1$



$$OO_1 = d = R$$

- $\alpha$  няма общи точки с  $k$

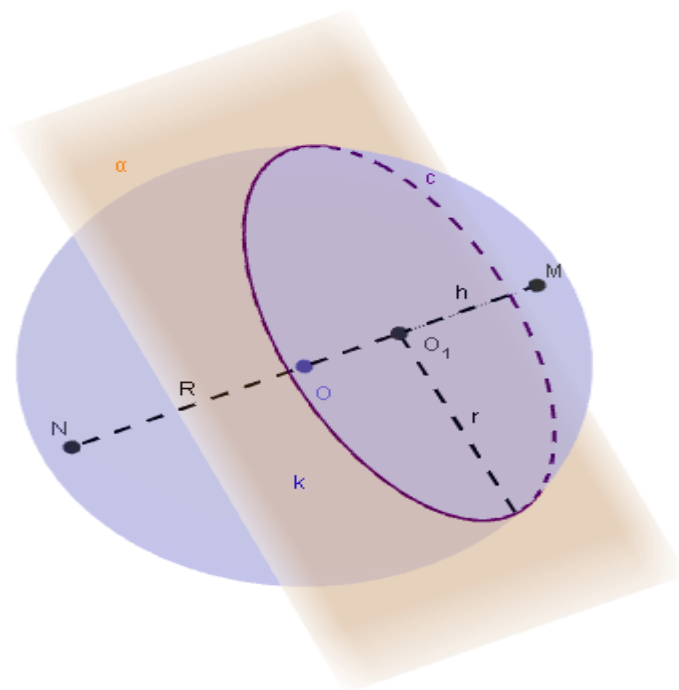


$$OO_1 = d > R$$

#### 4. Лице на сферичен отрез и лице на сфера

##### а) Лице на сферичен отрез

**Определение** – при пресичане на сфера с равнина повърхнината на сферата се разделя на две части, всяка от които се нарича сферичен отрез(сферичен сегмент).



На чертежа равнината  $\alpha$  пресича сфера с радиус  $R$  в окръжност с радиус  $r$ .

Окръжността разделя сферата на два сферични отреза. Ако височината на единия сферичен отрез е  $O_1M=h$ , а височината на другия сферичен отрез е:

$$- O_1N=2R-h.$$

**Лицето на сферичен отрез с височина  $h$  от сфера с радиус  $R$  се пресмята по формулата  $S_{сф.отрез} = 2\pi \cdot R \cdot h$**

**в) Лице на полусфера**

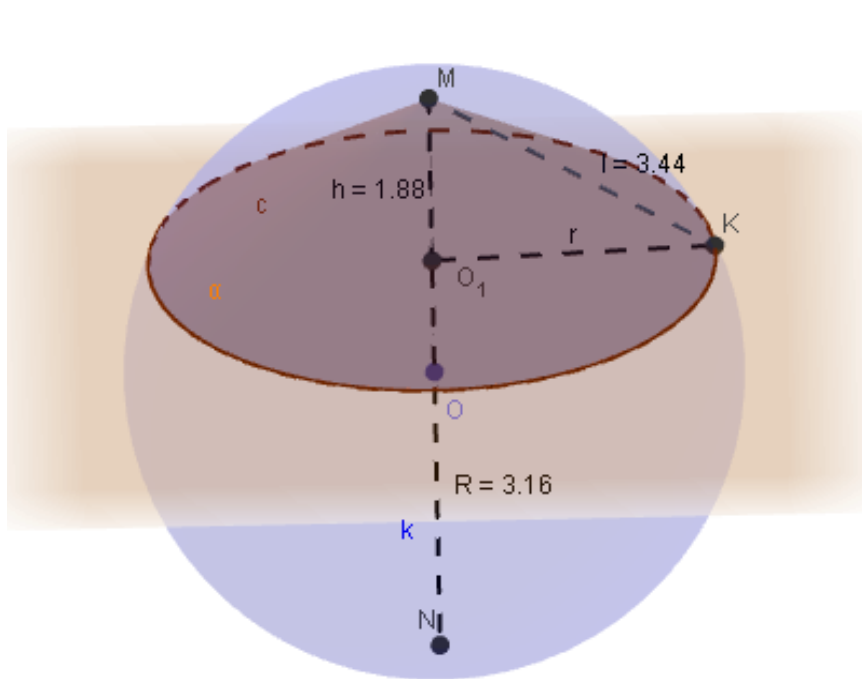
Дейност на учителя	Дейност на ученика
Какво е полусфера?	- При пресичането на сферата с равнина, която минава през центъра и повърхнината на сферата се разделя на две равни части наречени полусфери.
Ако разглеждаме полусферата като сферичен отрез тогава каква ще бъде височината и?	- Полусфера с радиус $R$ може да се разглежда като сферичен отрез с височина $h=R$ .
Тогава как ще изчисляваме лицето на полусферата?	<b>Лицето на полусфера с радиус <math>R</math> се получава при <math>h=R</math>, т.е. <math>S_{полусфера} = 2\pi \cdot R^2</math></b>



с) Лице на сфера

Дейност на учителя	Дейност на ученика
Сфера с радиус R може да се разглежда като сферичен отрез с височина $h=2R$ . Как ще изчислим лицето на сферата?	<p>- При пресичането на сферата с равнина, която минава през центъра и повърхнината на сферата се разделя на две равни части наречени полусфери.</p> <p><b>Лицето на сфера с радиус R се получава при <math>h=2R</math>, т.е.</b></p> $S_{сфера} = 4\pi.R^2$

Зад.1 В сфера с радиус R е вписан конус. Докажете, че лицето на сферичния отрез, съдържащ върха на конуса, е равно на лицето на кръг с радиус – образувателната на конуса.



Лицето на сферичния отрез се изчислява по формулата

$$S_{сф.отрез} = 2\pi.R.h = 2\pi.3.16.1.88 = 11.86\pi$$

Лицето на кръг с радиус - образувателната на конуса е

$$S_{кръг} = \pi.l^2 = \pi.3.44^2 = 11.86\pi$$

**Задачи за домашна:**

Зад.1 Сфера с радиус 50см е пресечена с равнина, която е на 40 см от центъра.

Намерете дължината на получената окръжност.

Зад.2 На разстояние 20 см от центъра на сфера е прекарана равнина, която пресича сферата в окръжност с дължина 94,20см. Намерете повърхнината на сферата.

**Автор:** Миглена Лилкова Багрянова

**Учебно заведение, град/село:** Професионална гимназия „Васил Левски“ – град Доспат

**E-mail** – megi\_dt@abv.bg

**Адрес** – гр. Доспат, ул. „Хисаря“ №20

**Използвана литература:** Учебник по математика 12 клас, задължителна подготовка, издателство Архимед, автори – Георги Паскалев, Здравка Паскалева