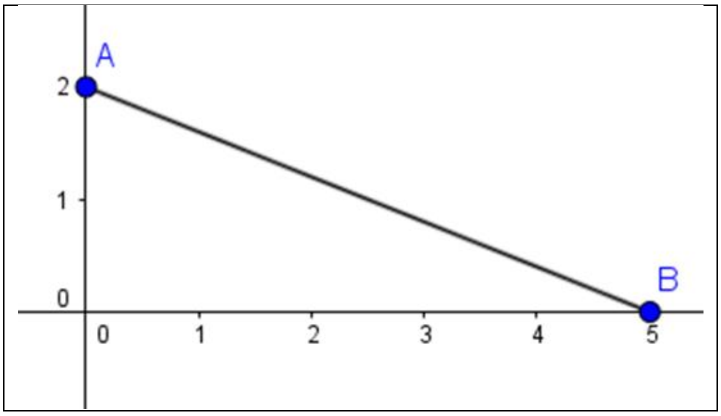
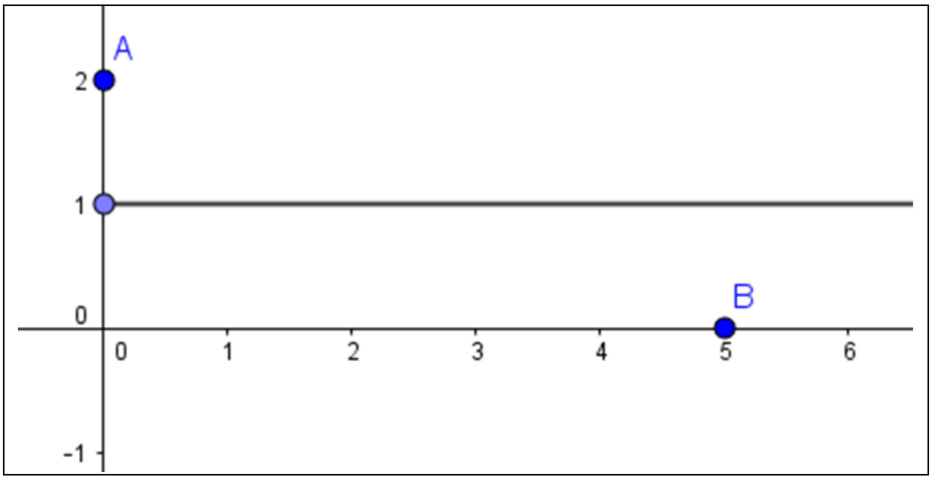
РЕШЕНИЯ НА ЗАДАЧИТЕ ОТ ТЕМА НА МЕСЕЦ МАЙ 2017 ГОДИНА

Самоходно устройство трябва да бъде придвижено за най-кратко време от точка A в точка B в една хоризонтална равнина (Фиг. 1; координатите на точките са в километри). При еднороден терен това става, като устройството се движи с максимална скорост по най-краткия път, който свързва точките (т.е. движението е по отсечката AB).



Фиг.1

Теренът обаче не е еднороден и максималната скорост на устройството в различните участъци, които трябва да бъдат преодолявани, е различна. При два вида терени ситуацията е представена на Фиг. 2. Едната част („първата“) е от точки (x,y), за които $y \geq 1$. Тя съдържа точката A и максималната скорост на устройството в нея ще означаваме с $v1$. Втората част на терена съдържа точката B. Максималната скорост на устройството в нея ще означаваме с $v2$.



Фиг. 2

Задача1.
Нека v1= 1.35 км/час и v2= 2 км/час.
а) Определете минималното време, за което устройството ще измине пътя от A до B. Отговорът се търси с точност до хилядните.

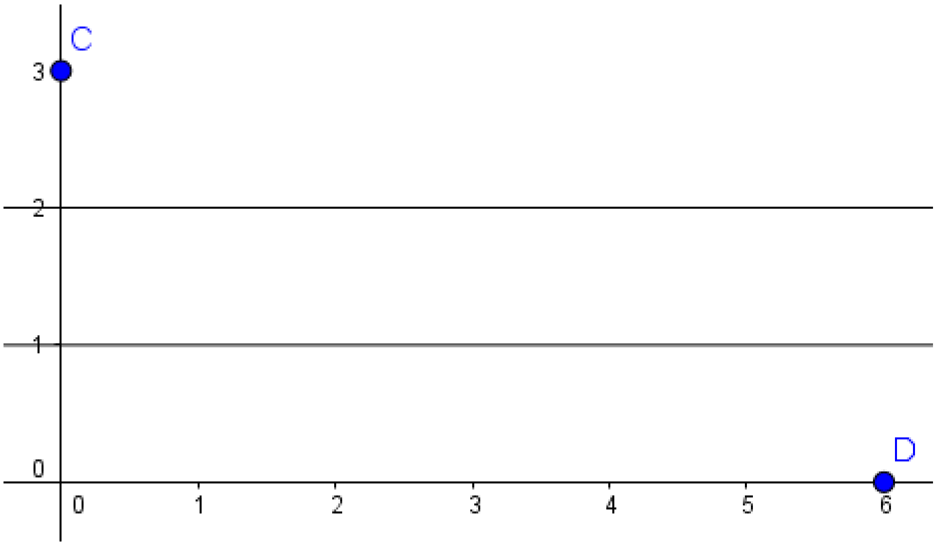
б) Намерете координатата x на точката X=(x; 1), в която устройството ще пресече разграничителната линия между двата терена. Отговорът се търси с точност до хилядните.

в) За намерената в предната подточка стойност на x пресметнете разликата

$$\frac{x}{v1\sqrt{1+x^2}} - \frac{5-x}{v2\sqrt{1+(5-x)^2}}.$$

Задача 2.
Решете задача 1 в) ако v1 = 2.7 км/час и v2= 3.5 км/час. Отговорът се търси с точност до хилядните.

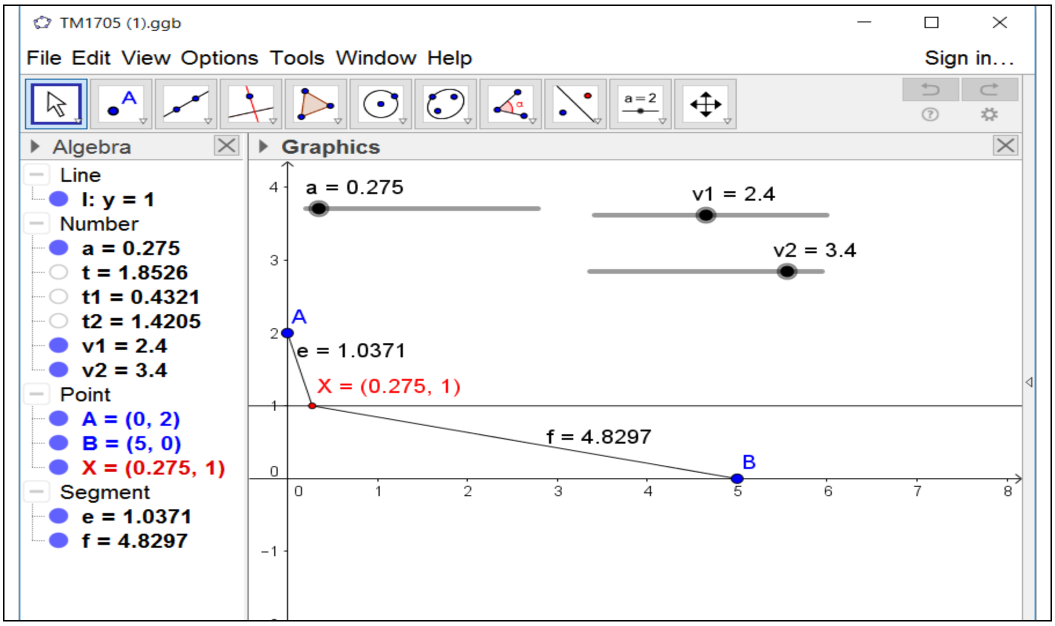
Задача 3.
Намерете най-краткото време, за което устройството може да се придвижи от C до D, ако ивиците, през които трябва да мине устройството, са три (фиг. 3); максималната му скорост в най-горната ивица (където е точката C) е v1= 1.35 км/час, в средната ивица е v2= 1.9 км/час и в последната ивица е v3= 2.2 км/час. Отговорът се търси в часове с точност до хилядните.



Фиг. 3.

Решения на задачите.

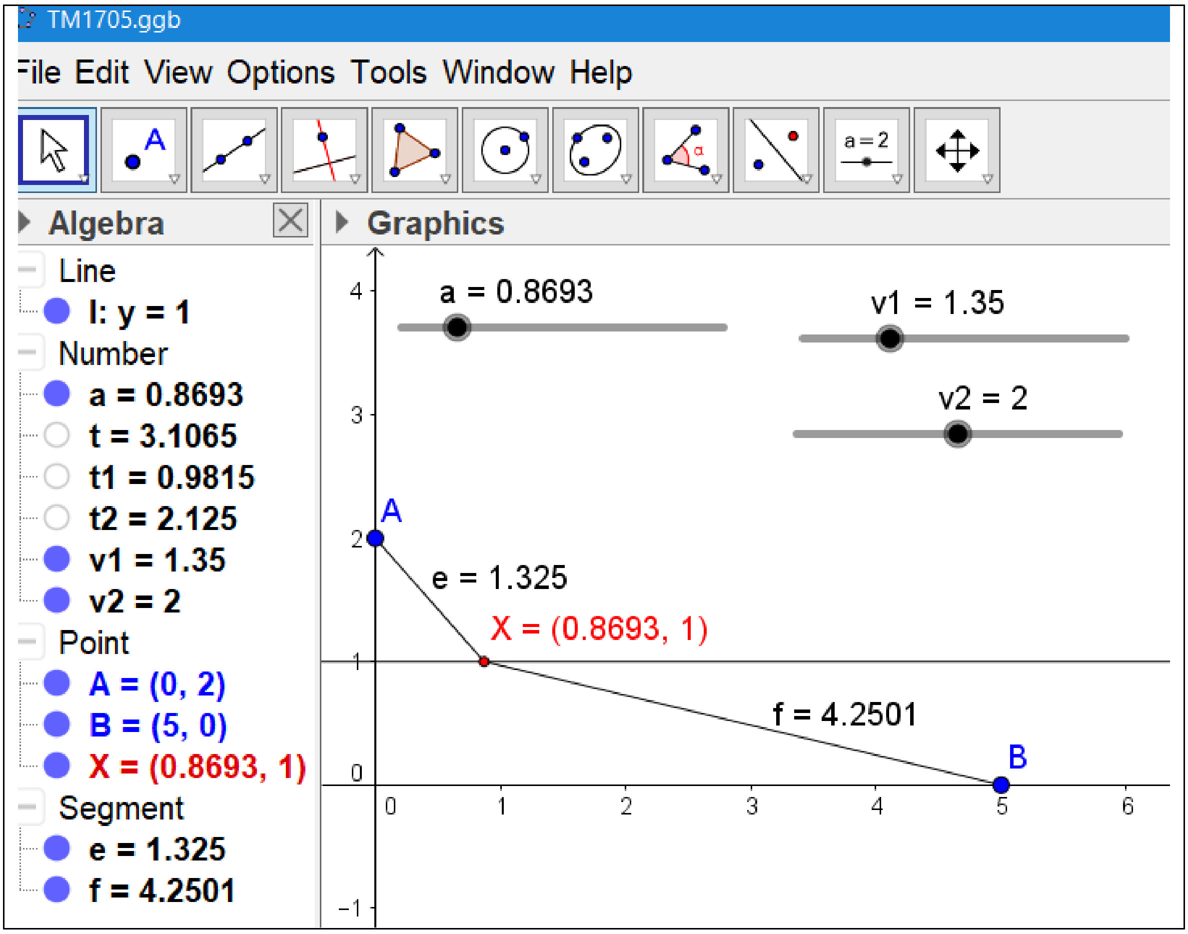
Предоставеният в темата [помощен файл във формат GeoGebra](20175_pf1.ggb) (20175_pf1.ggb) може да се използва за решаване на задачата. Ето един от изгледите, които този файл генерира:



Фиг. 4

Стойността на параметъра **a** , задавана с плъзгача за него, съответства на първата координата **x** на точката X. На Фиг. 4 стойността на **x=a** е 0.275. С **e** на същата фигура е означена дължината на отсечката AX (в случая **e**=1.0371), а с **f** – дължината на отсечката XB (**f**=4.8297). Най-краткото време **t1**, за което самоходното устройство може да измине пътя от A до X се получава, като разделим **e** на максималната скорост **v1.** В случая плъзгачът за **v1** „е сложен“ на **v1**=2.4 и помощният файл е пресметнал, че **t1** = 0.4321 **.** Аналогично, най-краткото време **t2**, необходимо за изминаване на отсечката ХВ, се получава, като разделим **f** на максималната скорост **v2**, която в случая е 3.4. От Фиг. 4 се вижда, че **t2** = 1.4205. Общото необходимо време **t** за измнаване на пътя АХВ е **t = t1 +t2**. На Фиг. 4 това време е **t** = 1.8526. За друга стойност на параметъра **a** ще получим друго необходимо време за изминване на пътя АХВ.

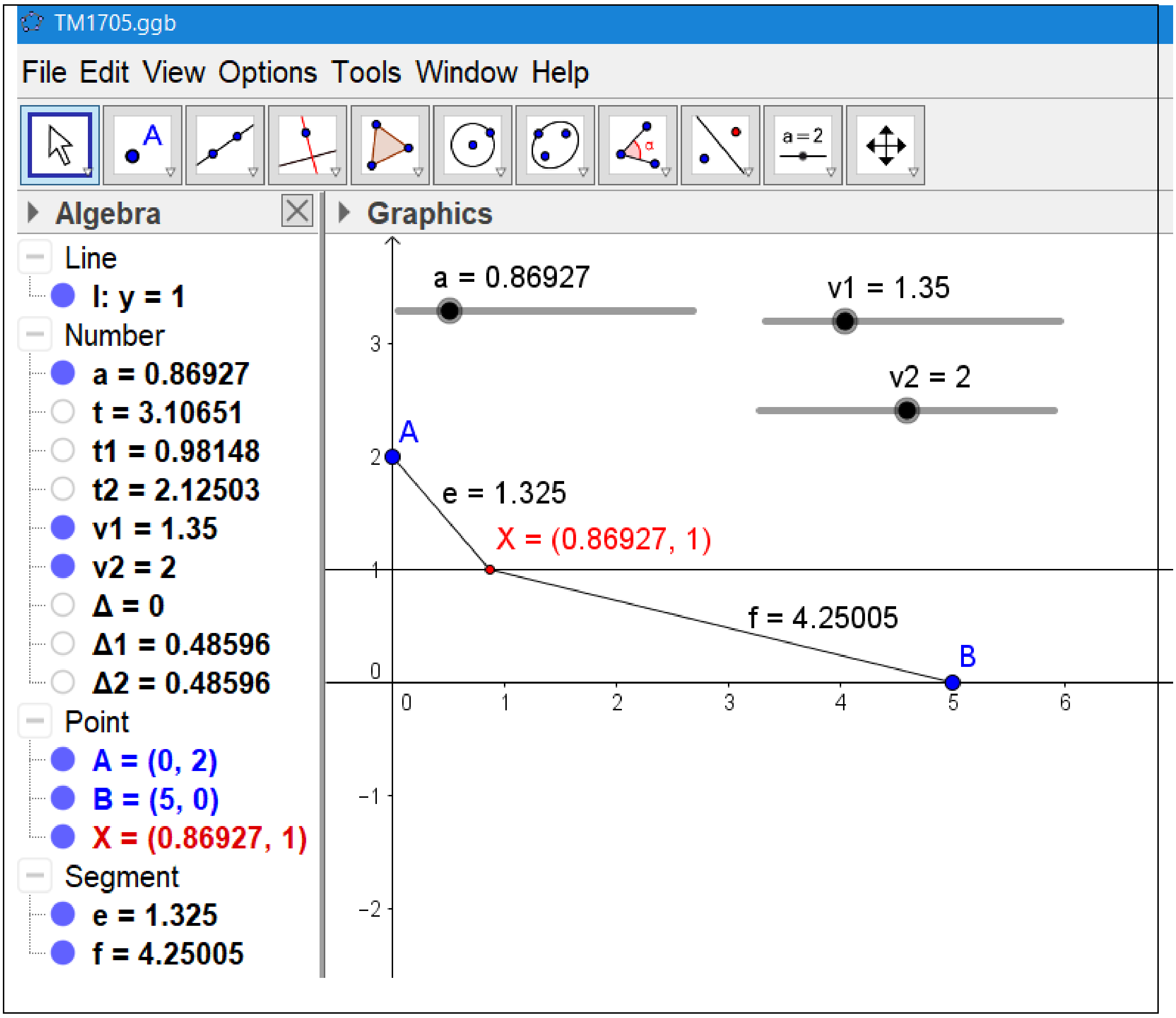
За да решим задача 1, трябва в помощния файл да отразим данните на задачата. Т.е. използваме плъзгачите, за да нагласим скоростите така, че **v1**= 1.35 и **v2** = 2. Като раздвижим след това плъзгача за **a** и проследим изменението на **t** забелязваме, че при нарастването на параметъра **a** от нула нагоре, стойността на **t** първоначално намалява, а след това започва да расте. Това позволява да намерим стойност за **a** , при която **t** достига своя минимум с достатъчна точност. След търпелива работа с плъзгача намираме като добро приближение на минимума на **t** числото 3.1065, което е отговор на задача 1 а). Тази стойност на **t** се получава при **x=a** = 0.8693 , което е отговор на задача 1 б). Стуацията е изобразена на Фиг. 5.



Фиг. 5

За решаването на задача 1 в) трябва да пресметнем стойността на израза $\frac{x}{v1\sqrt{1+x^2}} - \frac{5-x}{v2\sqrt{1+(5-x)^2}}$ при x=**a**=0.8693. Това може да се направи отделно с калкулатор или като се добавят още редове към помощния файл за тази тема, с които се пресмята стойността на израза. Видоизмененият помощен файл може да се намери тук (20175_pf2.ggb).

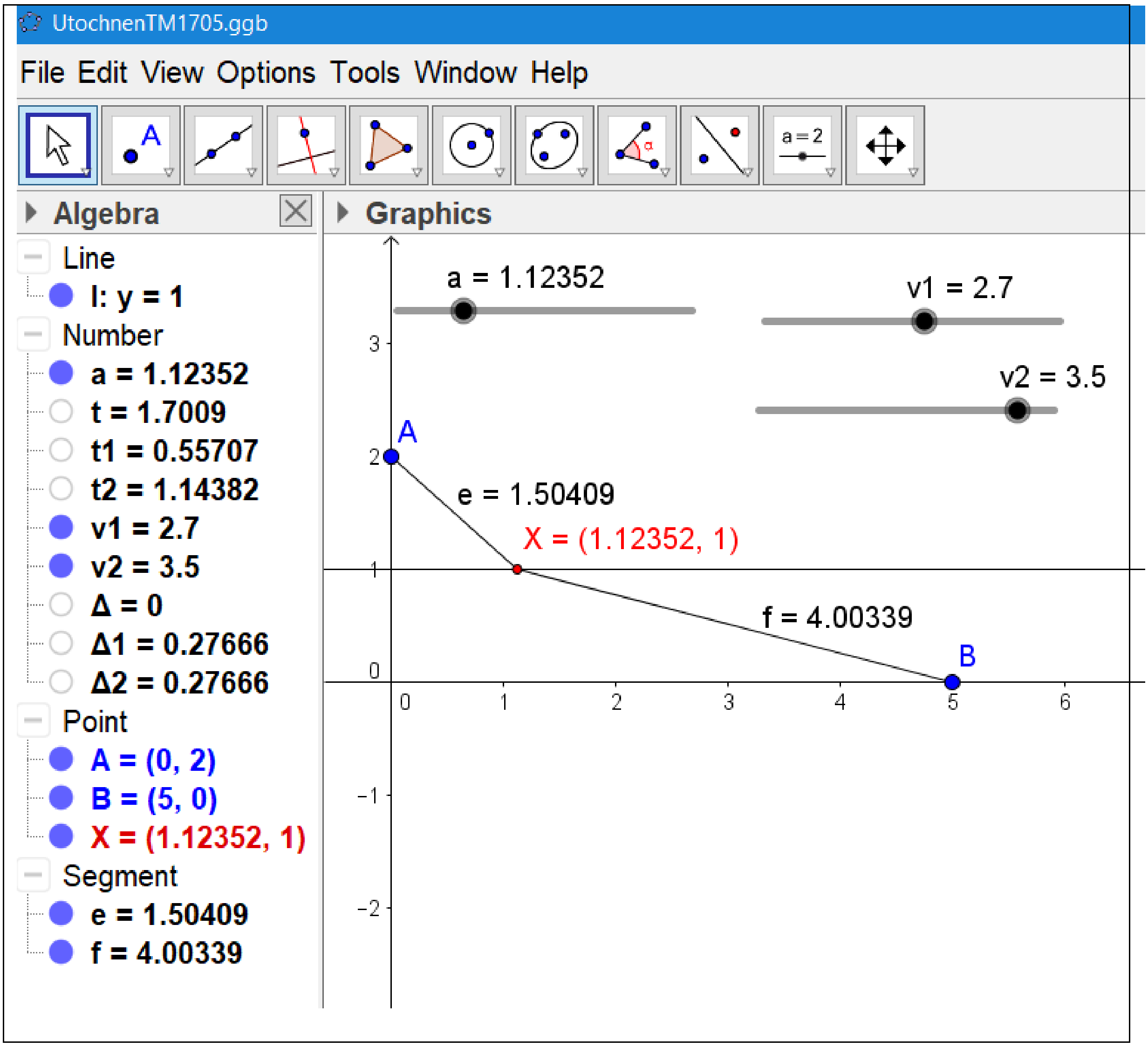
В него $\Delta 1 = \frac{a}{v1\sqrt{1+a^2}}$, $\Delta 2 = \frac{5-a}{v2\sqrt{1+(5-a)^2}}$ и $\Delta = \Delta 1 - \Delta 2$. Както личи от Фиг. 6, за оптималната стойност на параметъра **a** се получава, че $\Delta = 0$. Това е отговорът на задача 1 в).



Фиг. 6

Със същия видоизменен помощен файл можем да експериментираме с данните от втора задача: **v1**= 2.7 и **v2** = 3.5. Резултатът е представен на Фиг. 7 . Минималното време е **t** = 1.7009 и се постига, когато x=**a** = 1.12352.

За израза $\frac{x}{v1\sqrt{1+x^2}} - \frac{5-x}{v2\sqrt{1+(5-x)^2}}$ отново получаваме стойност нула при оптималната стойност x=**a** = 1.12352.

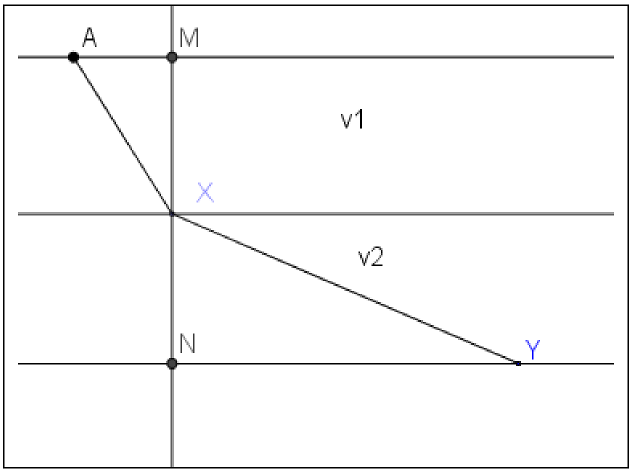


Фиг. 7

Целта на задача 1 в) и задача 2 е да подскаже, че за точката X=(x; 1), **през която минава „най-бързият път“** от A до B, изразът

$$\frac{x}{v1\sqrt{1+x^2}} - \frac{5-x}{v2\sqrt{1+(5-x)^2}}$$

е равен на нула. За задача 1 в), където **x** = 0.86927 и задача 2, където **x** = 1.12352 това вече беше проверено. Експерименти с други стойности на **v1** и **v2** неизменно показват, че изразът е нула (в рамките на точността, с която боравят компютрите). До същия резултат стигаме и ако променим разположението на точките A и B. Схематично ситуацията е онагледена на Фиг. 8.



Фиг. 8

Ако X е точката от разграничителната линия между двата терена, **през която минава най-бързия път от A до Y**, то е изпълнено следното съотношение:

$$(1) \quad \frac{AM}{v1\ AX} = \frac{YN}{v2\ YX}$$

Това равенство ще бъде доказано по-долу с математически средства дори и за случаите, когато MX не е равно на NX (ширината на двата терена (двете ивици) не е еднаква) . Равенството (1) е свързано и с важен природен закон. Засега ние ще считаме това равенство за изпълнено и ще го използваме не само за да решим задача 3, но и за да намерим друго решение на задачите 1 а) и 1 б). Нека **a1**=AM, **a2**=YN, **b1**=MX и **b2**=XN. От теоремата на Питагор следва, че AX = $\sqrt{a1^2 + b1^2}$ и YX = $\sqrt{a2^2 + b2^2}$. Тогава равенството (1) придобива вида

$$(2) \quad \frac{a1}{v1\sqrt{a1^2 + b1^2}} = \frac{a2}{v2\sqrt{a2^2 + b2^2}} .$$

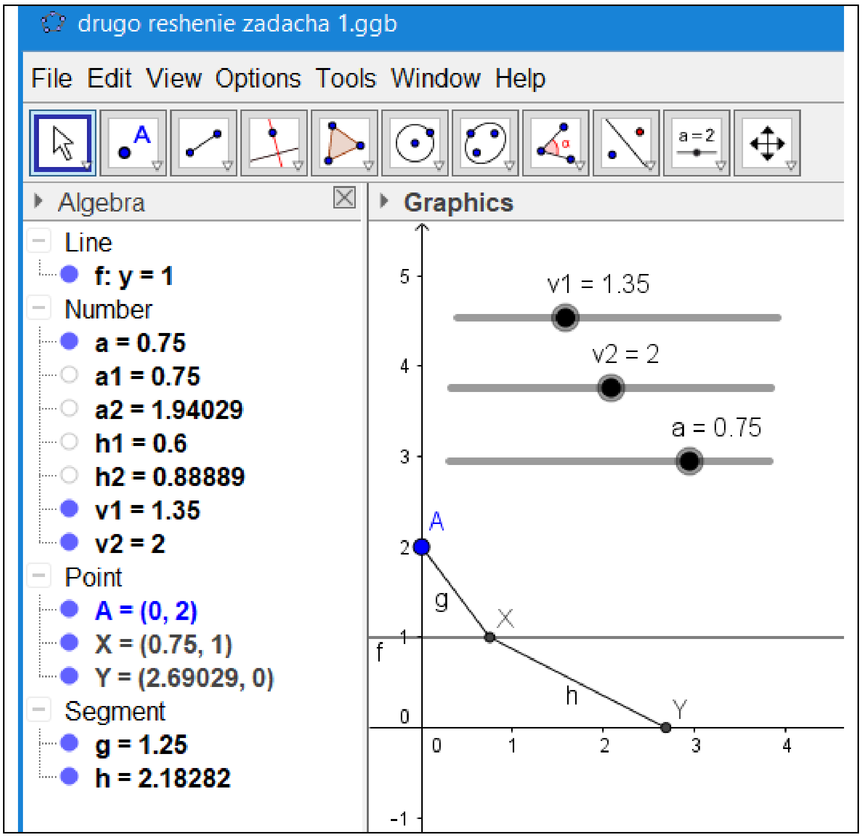
Ако положим $h1 = \frac{a1}{\sqrt{a1^2 + b1^2}}$ и $h2 = \frac{a2}{\sqrt{a2^2 + b2^2}}$, същото равенството се записва като

$$(3) \quad \frac{h1}{v1} = \frac{h2}{v2} .$$

От него се вижда, че когато скоростите **v1** и **v2** са известни, знанието на кое да е от числата $h1$ и $h2$, определя другото число. Например, $h2 = \frac{v2h1}{v1}$. Ако са известни ширините на ивиците **b1** и **b2,** то всяко от числата $h1$ и $h2$ позволява да намерим съответното нему число **a1** или **a2 .** Например, лесно се ввижда, че **a2** може да се изрази чрез $h2$ така: **a2** $= \frac{h2b2}{\sqrt{1-h2^2}}$.

В нашата конкретна ситуация скоростите **v1** и **v2** са известни. Определени са и величините **b1** и **b2** (те са равни на 1)**.** Чрез равенствата (2) и (3), за всяка стойност на параметъра **a1** можем да определим (пресметнем) числото **a2** така: най-напред пресмятаме $h1 = \frac{a1}{\sqrt{a1^2 + b1^2}}$, след това $h2 = \frac{v2h1}{v1}$ и накрая **a2** $= \frac{h2b2}{\sqrt{1-h2^2}}$. Тази последователност от действия е реализирана във файла (на ГеоГебра) който може да бъде отворен от тук. (20175_pf3.ggb)

Ето какво „произвежда“ този файл при **a1** = a = 0.75 и скоростите **v1** и **v2** от задача 1:

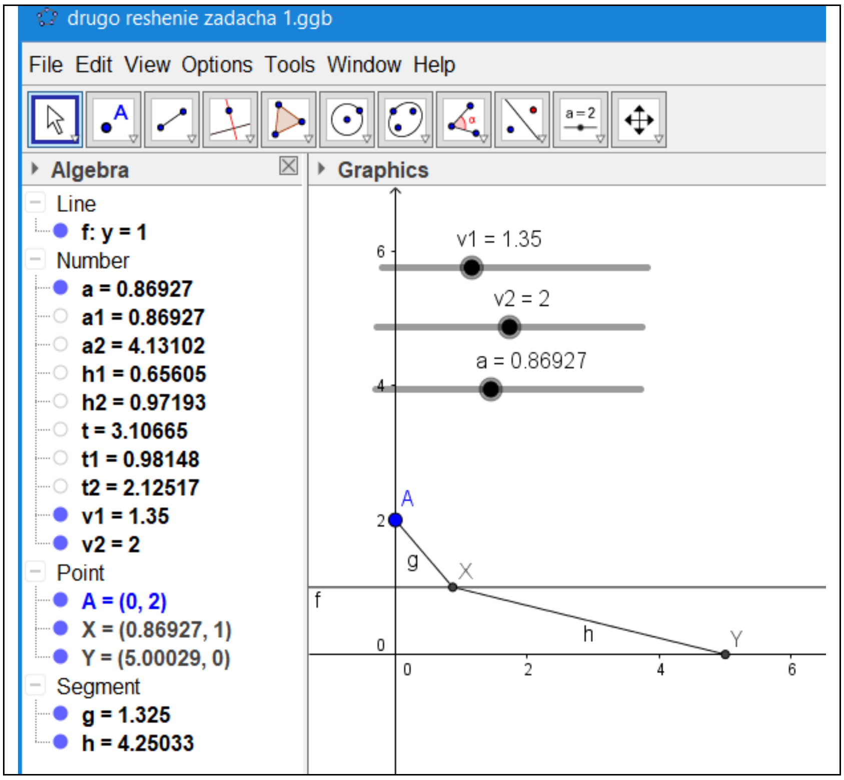


Фиг. 9

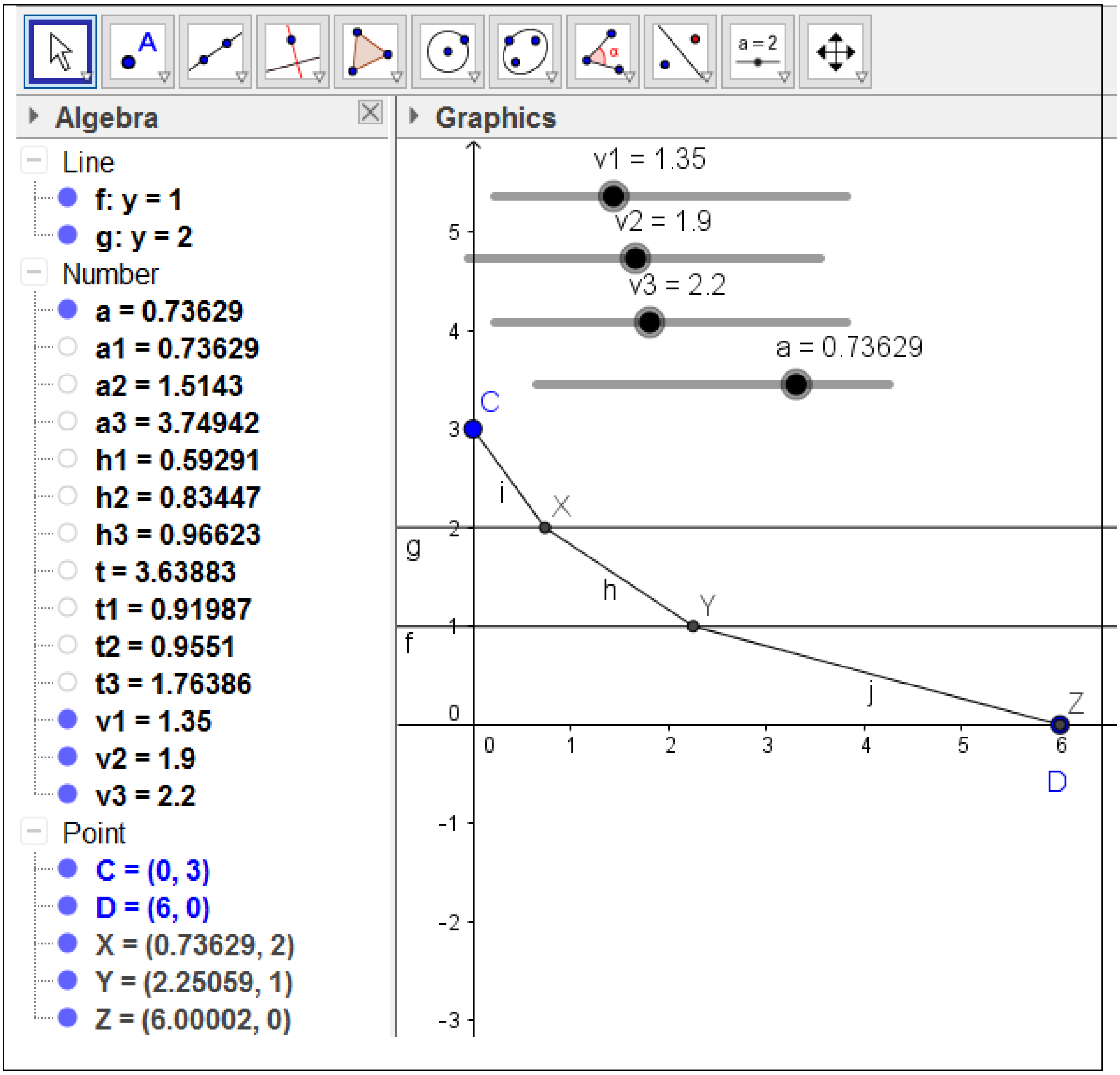
Пътят AXY е най-краткият по време път за изминаване на разстоянието от точка A до точка Y .

При стойност на параметъра **a** = 0.86927 получаваме резултата, изобразен на Фиг. 10. Виждаме, че точката Y с достатъчна точност съвпада с точката B от условието на задача 1.

Пресметнати са и времената t1, t2 и t, за които ще бъдат изминати съответно отсечките AX, XY и целия път AXY=AXB. Съвпадението с резултатите, изобразени на Фиг. 5 и Фиг. 6 е достатъчно добро и това е едно ново решение на задача 1 а) и задача 1 б). Преимуществото на този нов метод е, че той лесно се надгражда и за решение на трета задача. Трябва още веднъж да приложим същия алгоритъм: Намираме $h3$ от съотношението $\frac{h2}{v2} = \frac{h3}{v3}$ (в което $h2$,и $v2$ са вече известни, а $v3$ е дадено, и след това пресмятаме $\mathbf{a3} = \frac{h3}{\sqrt{1-h3^2}}$. Помощен файл, реализиращ този алгоритъм в условията на задача 3 може да се намери тук. (20175_pf4.ggb) На фиг. 11 е изобразено решението на задача 3. При a = 0.73629 точката Z съвпада с достатъчна точност (до десетохилядните) с точката D. Пътят CXYZ=ZXYD се изминава за време t=3.63883. Отговорът на тази задача е 3.639.

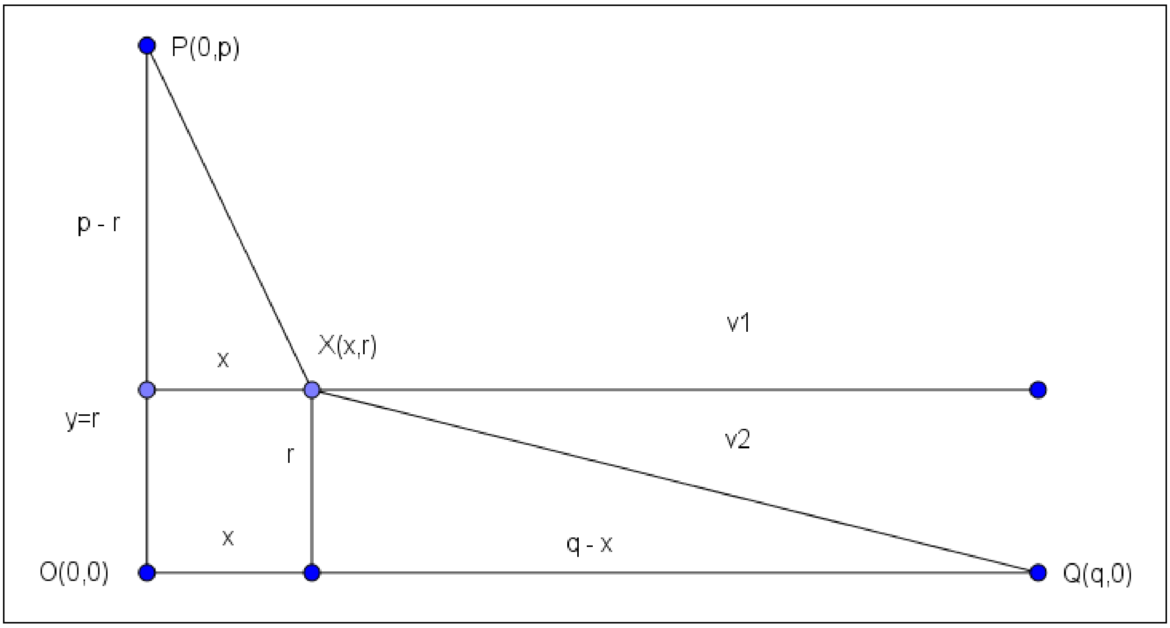

drugo reshenie zadacha 1.ggb
File Edit View Options Tools Window Help
Algebra
Graphics
Line
f: y = 1
Number
a = 0.86927
a1 = 0.86927
a2 = 4.13102
h1 = 0.65605
h2 = 0.97193
t = 3.10665
t1 = 0.98148
t2 = 2.12517
v1 = 1.35
v2 = 2
Point
A = (0, 2)
X = (0.86927, 1)
Y = (5.00029, 0)
Segment
g = 1.325
h = 4.25033
v1 = 1.35
v2 = 2
a = 0.86927
A
g
X
f
h
Y

Фиг. 10



Фиг. 11

Сега можем да преминем към обосноваването на съотношението (1), а значи и на еквивалентните на него равенства (2) и (3). Без ограничаване на общността можем да разсъждаваме върху ситуацията, изобразена на Фиг. 12:



Фиг. 12

Тук P(0,p) и Q(q,0) са дадени (фиксирани) точки, правата y = r е разграничителната линия между двете среди, а X(x,r) е произволна (подвижна) точка от тази права. Както по-горе, v1 и v2 са максималните скорости на устройството в едната и в другата среда, съответно. По теоремата на Питагор отсечката PX има дължина $\sqrt{x^2+(p-r)^2}$. Самоходното устройство ще измине тази отсечка за време $t1=\frac{\sqrt{x^2+(p-r)^2}}{v1}$. Аналогично, изминаването на отсечката XQ ще стане за време $t2=\frac{\sqrt{(q-x)^2+r^2}}{v2}$. Общото необходимо време за изминаване на пътя PXQ е $t=t1+t2=\frac{\sqrt{x^2+(p-r)^2}}{v1}+\frac{\sqrt{(q-x)^2+r^2}}{v2}$. Това е една функция на променливата x , която по-нататък ще бележим с $t(x)$. При конкретни стойности на константите p, q, r, поведението на тази функция може да бъде изследвано (като, например се нарисува графиката ѝ с ГеоГебра). То е относително просто. Когато променливата x расте от нула до q, функцията $t(x)$ най-напред намалява, достига своя минимум за някое число x^* , а след това расте. Математическата същност на разглежданата задача е да се намери това число x^* , за което тази функция приема минималната си стойност. От математическия анализ е известно, че за това x^* производната $t'(x)$ на функцията $t(x)$ става нула. По правилата за диференциране на функции намираме, че $t'(x)=\frac{x}{v1\sqrt{x^2+(p-r)^2}}-\frac{(q-x)}{v2\sqrt{(q-x)^2+r^2}}$. Ясно е, че условието $t'(x)=0$ е еквивалентно с всяко от съотношенията (1), (2) и (3).

Сега ще представим една идея, чрез която, без да се използват производни, е възможно да се докаже, че ако за някое число x^* е изпълнено равенството

$$(4) \qquad \frac{x^*}{v1\sqrt{x^{*2}+(p-r)^2}}=\frac{(q-x^*)}{v2\sqrt{(q-x^*)^2+r^2}},$$

то функцията $t(x)$ си достига минимума в x^*, т.е. $t(x)\geq t(x^*)$ за всяко x . Това става с помощта на неравенството

$$(5) \qquad |ac+bd|\leq\sqrt{a^2+b^2}\,\sqrt{c^2+d^2}\,,$$

което може да се докаже с директна проверка (разликата от квадратите на дясната и лявата страна на неравенството е квадрат на алгебричен израз и, следователно, е неотрицателна). Особено удобно се прилага това неравенство, когато $\sqrt{c^2 + d^2}$ =1 и всички участващи в него числа са положителни.

Нека $c = \frac{x^*}{\sqrt{x^{*2}+(p-r)^2}}$, $d = \frac{(p-r)}{\sqrt{x^{*2}+(p-r)^2}}$, $a = x$ и $b = (p-r)$. Тогава от неравенство (5) получаваме

$$(6) \qquad \sqrt{x^2 + (p-r)^2} \geq \frac{xx^* + (p-r)^2}{\sqrt{x^{*2}+(p-r)^2}}.$$

Аналогично, ако $c = \frac{(q-x^*)}{\sqrt{(q-x^*)^2+r^2}}$, $d = \frac{r}{\sqrt{(q-x^*)^2+r^2}}$, $a = q - x$ и $b = r$, от неравенство (5) получаваме

$$(7) \qquad \sqrt{(q-x)^2 + r^2} \geq \frac{(q-x)(q-x^*) + r^2}{\sqrt{(q-x^*)^2+r^2}}$$

От (6) и (7), след като вземем предвид и равенството (4), получаваме

$$(8) \qquad t(x) = \frac{\sqrt{x^2+(p-r)^2}}{v1} + \frac{\sqrt{(q-x)^2+r^2}}{v2} \geq \frac{xx^* + (p-r)^2}{v1\sqrt{x^{*2}+(p-r)^2}} + \frac{(q-x)(q-x^*) + r^2}{v2\sqrt{(q-x^*)^2+r^2}} =$$

$$\frac{xx^* + (p-r)^2}{v1\sqrt{x^{*2}+(p-r)^2}} + \frac{(q-x)x^*}{v1\sqrt{x^{*2}+(p-r)^2}} + \frac{r^2}{v2\sqrt{(q-x^*)^2+r^2}} =$$

$$\frac{(p-r)^2 + qx^*}{v1\sqrt{x^{*2} + (p-r)^2}} + \frac{r^2}{v2\sqrt{(q-x^*)^2 + r^2}} =$$

$$\frac{(p-r)^2 + x^{*2} + qx^* - x^{*2}}{v1\sqrt{x^{*2} + (p-r)^2}} + \frac{(q-x^*)^2 + r^2 - (q-x^*)^2}{v2\sqrt{(q-x^*)^2 + r^2}} =$$

$$\frac{\sqrt{x^{*2}+(p-r)^2}}{v1} + \frac{\sqrt{(q-x^*)^2+r^2}}{v2} + \frac{x^*(q-x^*)}{v1\sqrt{x^{*2}+(p-r)^2}} - \frac{(q-x^*)^2}{v2\sqrt{(q-x^*)^2+r^2}} =$$

$$t(x^*) + (q-x^*)\left(\frac{x^*}{v1\sqrt{x^{*2} + (p-r)^2}} - \frac{(q-x^*)}{v2\sqrt{(q-x^*)^2 + r^2}}\right) = t(x^*).$$

Допълнителни коментари, въпроси и задачи, свързани с тази тема.

Закон на Снелиус.

На Фиг. 8 да означим с α ъгъла AXN и с β ъгъла NXY. От тригонометрията е известно, че $\sin\alpha = \frac{AM}{AX}$ и $\sin\beta = \frac{YN}{YX}$. Тогава съотношението (1) придобива вида $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{v1}{v2}$. То е изпълнено за точката X от разграничителната линия между двете среди, през която минава най-бързият път от A до Y. От друга страна, от геометричната оптика е известен т. нар. Закон на Снелиус (http://physics-bg.org/au/052-g-optika.php). В него срещаме същото съотношение. От това, което разгледахме по-горе и от закона на Снелиус следва, че лъч светлината при преминаване през две среди се движи винаги по най-краткия (по време) път.

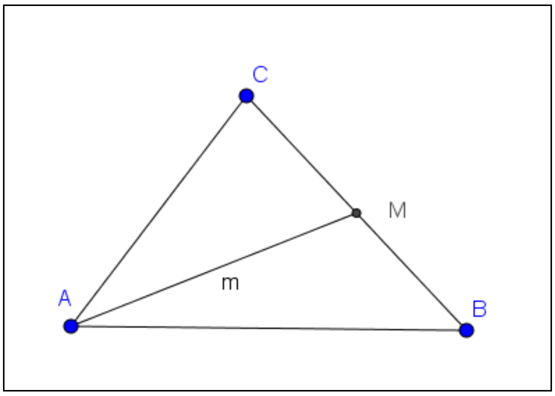
Твърдение. За всеки две различни числа $x1$ и $x2$, за които е определена функцията $t(x)$, е в сила неравенството

$$(9)\quad \frac{1}{2}\mathrm{t}(x1) + \frac{1}{2}\ t(x2) > t(\frac{1}{2}x1 + \frac{1}{2}x2).$$

Доказателство. За всеки неизроден триъгълник ABC (Фиг. 13) е изпълнено неравенството

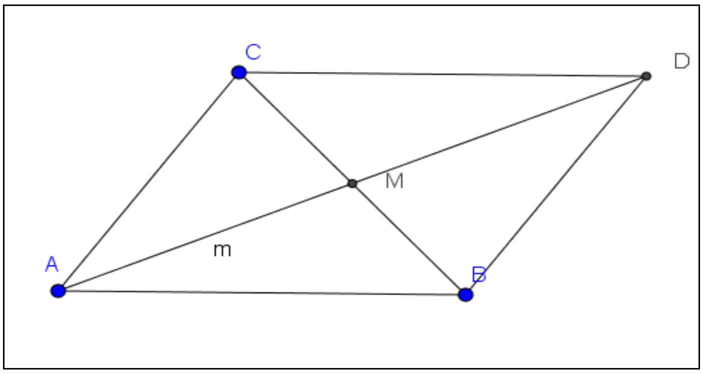
$$\mathrm{AC} + \mathrm{AB}\ > 2m$$

където m е медианата през върха A. Това се вижда най-лесно като допълним триъгълника ABC



Фиг. 13

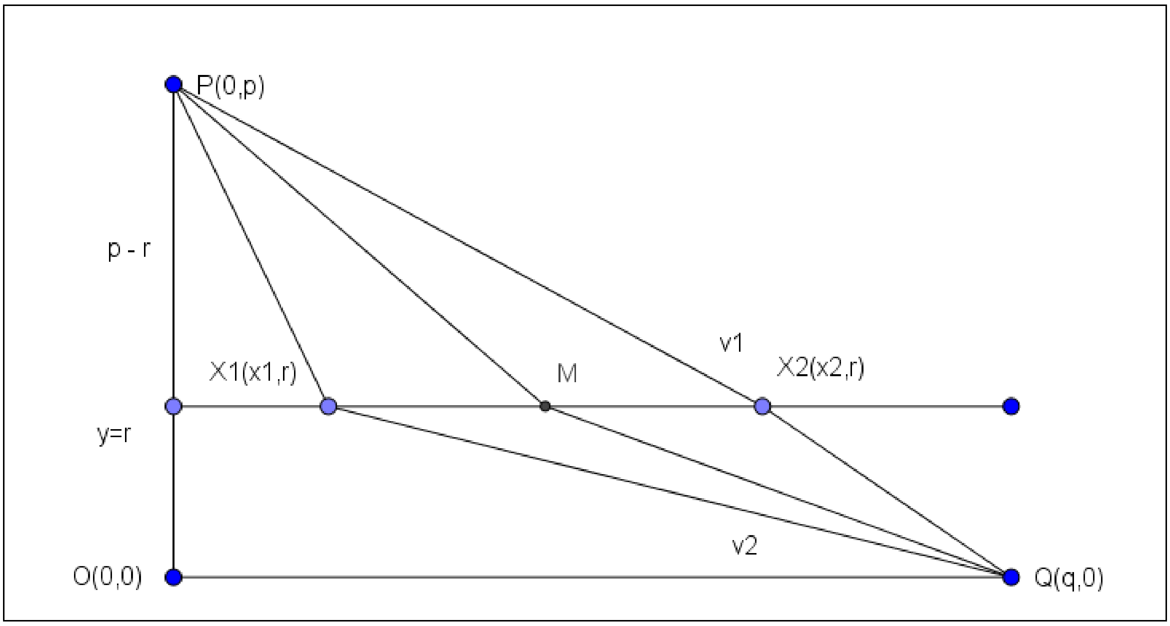
до успоредник (Фиг. 14) и разгледаме триъгълника ADC.



Фиг. 14

За него е в сила “неравенството за триъгълника”: 2m = AD $< AC + CD = AC + AB$.

Да разгледаме сега Фиг. 15, където точката M е среда на отсечката с краища X1(x1,r) и X2(x2,r).



Фиг. 15

Ясно е, че координатите на точка M са $(\frac{1}{2}x1 + \frac{1}{2}x2, r)$. В сила са неравенствата 2PM < PX1 + PX2 и 2QM < QX1 + QX2 . От тях и от определението на функцията $t(x)$ (Фиг. 12) получаваме

$$\frac{1}{2}t(x1) + \frac{1}{2}t(x2) = \frac{1}{2}\left(\frac{PX1}{v1} + \frac{QX1}{v2}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{PX2}{v1} + \frac{QX2}{v2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{PX1}{v1} + \frac{PX2}{v1}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{QX1}{v2} + \frac{QX2}{v2}\right) > \frac{1}{2}\left(\frac{2PM}{v1}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{2QM}{v2}\right) = \left(\frac{PM}{v1}\right) + \left(\frac{QM}{v2}\right) = t\left(\frac{1}{2}x1 + \frac{1}{2}x2\right).$$

Доказаното неравенство изразява едно важно свойство на функцията $t(x)$. Тя е „строго изпъкнала“ и има редица интересни свойства. Ето едно от тях.

Упражнение. Използвайте току-що доказаното неравенство за да докажете, че $t(x)$ си достига минимума само веднъж (само за една стойност на x).

Предложил темата: Николай Николов

Формулиране на темата и описание на решенията: Петър Кендеров,

Редактор: Тони Чехларова

Лого на темата (плочка): Койя Чехларова

Техническа поддръжка: Георги Гачев, Тодор Брънзов, Анна Самева

Предложения за подобряване и разширяване на този текст могат да бъдат изпращани на адрес vorednek@yahoo.com